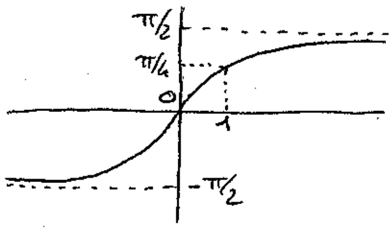
DS1 - Correction

Exercice 1

Q1- La fonction arctan est <u>définie et dérivable sur $\mathbb{R}$</u>.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$.

Q2-



Q3- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto \ln|x| = \ln x$.
Ainsi les solutions de (H) sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions de la forme
$\boxed{x \mapsto \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{e^{\ln x}} = \frac{\lambda}{x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

Q4- Notons f la fonction $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$. Elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'y annule pas.

$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\lambda'(x) . x - \lambda(x) \times 1}{x^2} = \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2}$.

Ainsi f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad f'(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$

$\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$

$\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \frac{x\lambda'(x)}{x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$

$\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

D'après Q1, on en déduit que $\boxed{\lambda(x) = \arctan x}$ convient.
Finalement la fonction $x \mapsto \frac{\arctan x}{x}$ est solution particulière de (E).

Q5. D'après le cours, par Q3 et Q4, on a obtenu
$$\boxed{S_{(E)} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{\arctan x}{x}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Q6. D'après la question précédente y est de la forme $y(x) = \frac{\lambda}{x} + \frac{\arctan x}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $y(1) = \pi$ ce qui équivaut à $\frac{\lambda}{1} + \frac{\arctan(1)}{1} = \pi$, ou encore $\lambda + \frac{\pi}{4} = \pi$ d'où $\lambda = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Finalement $\boxed{y : x \longmapsto \frac{3\pi}{4x} + \frac{\arctan x}{x}}$ est l'unique solution de (E) sur $]0;+\infty[$ vérifiant $y(1)=\pi$.

Q7. D'après le cours, $\frac{1}{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1 - y + y^2 + o(y^2)$ (En fait $1-y+o(y)$ suffit.)

En posant $y = x^2$, il reste à l'ordre 2, $\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)}$

Q8. • En primitivant le résultat précédent il vient

$\arctan x - \arctan 0 \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Or $\arctan 0 = 0$ d'où $\boxed{\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$.

• Enfin, $f(x) = \frac{\arctan x}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x - x^3/3 + o(x^3)}{x} = \boxed{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$.

Q9. D'après la question précédente, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Or $f(0) = 1$ par définition. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, c'est la définition de $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$

Q10. $\forall x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\overset{Q8}{=}} \frac{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) - 1}{x} = \frac{-\frac{x^2}{3} + o(x^2)}{x} = \frac{-x}{3} + o(x)$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R}$. donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$.

Q11. D'après le cours, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$:

Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ d'où $\boxed{y = 1}$ (il s'agit donc d'une tangente horizontale.)

Q12. La fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions qui le sont.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $p'(x) = 1 - \left[2x \arctan x + (1+x^2) \times \frac{1}{1+x^2}\right] = \boxed{-2x \arctan x}$.

On a alors

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	
$\arctan x$		$-$	0	$+$	
$p'(x)$		$-$	0	$-$	
p		$\searrow$	0	$\searrow$	

En particulier, on obtient $\boxed{\forall x<0,\ p(x)>0 \quad \text{et} \quad \forall x>0,\ p(x)<0}$.

Q13. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}\times x - \arctan(x)\times 1}{x^2} = \frac{\frac{x - \arctan(x)\times(1+x^2)}{1+x^2}}{x^2} = \boxed{\frac{p(x)}{x^2(1+x^2)}}$$

Q14. D'après les deux questions précédentes, il vient (le dénominateur de $f'(x)$ est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $f(x)$).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour les limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0$.
le résultat en $-\infty$ est analogue car $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{-\pi}{2}$.

Exercice 2

Q15. • $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$. (ie $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0).

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $c(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = c(x)$ donc $\boxed{c \text{ est paire}}$.

et $s(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -s(x)$ donc $\boxed{s \text{ est impaire}}$.

Q16. • c est la somme de deux exponentielles donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ c(x) > 0}$.

• $s(x) \geqslant 0 \iff e^{x} - e^{-x} \geqslant 0 \iff e^{x} \geqslant e^{-x} \overset{\ln}{\iff} x \geqslant -x$

$\iff 2x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ s(x) \geqslant 0 \text{ et } \forall x < 0,\ s(x) < 0}$.

Q17. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part $c(x)^2 = \dfrac{(e^{x} + e^{-x})^2}{4} = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$ et

d'autre part $1 + s(x)^2 = 1 + \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$

donc on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ c(x)^2 = 1 + s(x)^2}$

Q18. Soit $x > 0$. On a

• $\dfrac{a e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \dfrac{b e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{a e^{-x}(1 + e^{-x}) + b e^{-x}(1 - e^{-x})}{(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})}$

$= \dfrac{a e^{-x} + a e^{-2x} + b e^{-x} - b e^{-2x}}{1 + e^{-x} - e^{-x} - e^{-2x}} = \dfrac{(a+b) e^{-x} + (a-b) e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$

Par ailleurs, $\dfrac{1}{s(x)} = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}} = \dfrac{2e^{-x}}{(e^{x} - e^{-x}) e^{-x}} = \dfrac{2e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$

Par identification, il vient $\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 0 \end{cases} \iff \boxed{a = b = 1}$

Q19. Notons G une primitive de $\frac{1}{s}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Grâce à la question précédente, on a $G(x) = \boxed{\ln(1 - e^{-x}) - \ln(1 + e^{-x})}$

$= \ln\left(\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right) \underset{\substack{\times \frac{e^x}{e^x} \\ \text{dans le } \ln}}{=} \ln\left(\dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}\right)$ ← on peut montrer que c'est égal à $\ln\left(\dfrac{s(x/2)}{c(x/2)}\right)$.

Q20 - • Si $x>0$ alors $x+\sqrt{1+x^2}>0$ comme somme de deux termes strictement positifs.

• Si $x=0$ alors $0+\sqrt{1+0^2}=1>0$.

• Soit maintenant $x<0$. Écrivons $x=-y$ avec $y>0$.

On a clairement $0\leq y^2<y^2+1$ donc $\sqrt{y^2}<\sqrt{y^2+1}$.

Or $\sqrt{y^2}=|y|=y$ car $y>0$.

Ainsi $y<\sqrt{y^2+1}$ ce qui se réécrit $0<-y+\sqrt{y^2+1}=x+\sqrt{x^2+1}$.

Bilan : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad x+\sqrt{1+x^2}>0}$.

Q21 - Soit $x\in\mathbb{R}$. D'après Q20, l'expression $f\circ s(x)$ est bien définie.

On a $f(s(x))=\ln\left(s(x)+\sqrt{s(x)^2+1}\right)\overset{Q17}{=}\ln\left(s(x)+\sqrt{c(x)^2}\right)$.

$$=\ln\left(s(x)+c(x)\right)$$

$\swarrow\ \sqrt{c(x)^2}=|c(x)|\overset{Q16}{=}c(x)$

$$=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

$$=\ln\left(e^x\right)=\boxed{x}$$

Q22 - Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$s(f(x))=\frac{1}{2}\left[e^{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-e^{-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{e^{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{x^2+2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2-1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}x^2+\cancel{2}x\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\boxed{x}$$

Q23 - D'après Q21 et Q22, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f\circ s(x)=s\circ f(x)=x$ <u>ie</u>

les fonctions f et s sont <u>inverses</u> l'une de l'autre (= fonctions <u>réciproques</u>)

En particulier, les deux sont des bijections.